Chceme sečíst řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)3^n}.$$

Položme

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

Potřebujeme tedy spočítat $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$. Nejdříve si všImneme, že řada má poloměr konvergence 1. Dále máme

$$f(z) = \frac{z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} - \frac{1}{2z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{z}{2} g(z) - \frac{1}{2z}(g(z) - z),$$

kde

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Podle věty o derivování mocninných řad platí

$$g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}.$$

Odtud snadnou integrací dostaneme

$$g(z) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+z}{1-z} \right|.$$

Platí tedy (pro $|z| < 1$)

$$f(z) = \left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2z} \right) \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + \frac{1}{2}$$

a

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{2}.$$